# ZBIÓR ZADAŃ

Andrzej Rowiński

Zadania pochodzą z różnych egzaminów z lat 1990 – 2023 i są przeznaczone głównie dla poziomu rozszerzonego.

## Oznaczenia:

**R** – poziom rozszerzony

## Spis treści

# Zadania z poszczególnych działów

## Funkcje

- [ ] Narysuj wykresy funkcji i wypisz ich własności:
    - $f(x) = -3x + 2$
    - $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$
    - $f(x) = 2x^{-3}$
    - $f(x) = 3^x + 2$
    - $f(x) = \log x$

- [ ] Zbadaj ciągi:
    - $a_n = 2n + 3$ i wyznacz sumę 10 początkowych wyrazów.
    - **R** $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ i wyznacz jego sumę.

- [ ] Suma trzech liczb tworzących ciąg geometryczny jest równa 62, a ich iloczyn wynosi 1000. Wyznacz ten ciąg.

- [ ] Między liczby 2 i 12 wstaw dwie liczby tak, aby 3 pierwsze tworzyły ciąg geometryczny, a 3 ostatnie ciąg arytmetyczny.

- [ ] **R** Wyznacz dziedziny funkcji oraz zbadaj ich monotoniczność i ewentualne ekstrema:
    - $f(x) = \frac{2x+5}{4x^2-16}$
    - $f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 5x$

- [ ] **R** Naszkicuj wykres funkcji na podstawie dziedziny i granic:

    $f(x) = \frac{x^2-3}{x^2-9}$

- [ ] **R** Naszkicuj wykresy funkcji:
    - $f(x) = 2\sin x - 1$
    - $f(x) = |\mathrm{tg}x|$

- [ ] **R** Wyznacz asymptoty funkcji:

f(x) = $\frac{2x^3}{x^2 - 1}$

- [ ] **R** Napisz równanie stycznej do funkcji f(x) = $x^3 - 2x^2 + 1$ w punkcie $x_o = -2$.

- [ ] **R** Zbadaj przebiegi zmienności funkcji:

  - f(x) = $3x^3 + 2x^2 - x$
  - f(x) = $\frac{3x^3}{2x^2 - 32}$

## Wielomiany i wyrażenia wymierne

❑ Wykonaj podane działania:

- $(a^2 + b^2c^3 - 3ab + 2a)(a^2 - ac + ab^2)$
- $\frac{3x-4}{x+4} + \frac{2x+1}{2x+8}$
- $(2x-8)(3x+2) : \frac{x-3}{x^2+2}$

❑ **R** Wyznacz pochodną wyrażenia:

$$(3x+2) + \sqrt{x} - \frac{x^2 - 2x}{2x+3}$$

❑ Wyznacz dziedzinę funkcji:

$f(x) = \log_{(2x+3)}(x^{-2} + 1)$

## Równania i nierówności

❑ Rozwiąż równania:

- $2(x - 3) - 4(-2x + 2) = -8$
- $\frac{x-3}{4x+1} + \frac{2}{x} = \frac{-3}{x+2}$
- $\log\{\log_2[\log_3(x+1)]\} = 0$
- **R** $2^x + 2^{x+1} = 24$
- $4x^2 - 4x + 1 = 0$

❑ Rozwiąż nierówności:

- $2x^2 - 3x + 1 < 0$
- **R** $\frac{2x-3}{3x+4} > 0$
- **R** $\log_{(x-3)}(4x+2) > 1$

❑ **R** Dla jakiego parametru m, równanie $x^2 + (2m - 3)x + 2m + 5 = 0$ ma dwa różne pierwiastki jednakowych znaków ?

- [ ] **R** Dla jakiego parametru m, suma odwrotności kwadratów pierwiastków równania $x^2 - (m - 5)x + m^2 - 6m + 5 = 0$ jest większa od jeden ?

- [ ] **R** Rozwiąż równanie: $2\cos x + 1 = 0$

- [ ] **R** Rozwiąż nierówność: $2\sin x - \sqrt{2} > 0$

- [ ] Rozwiąż równania:
    - $\binom{n}{2} = 1$
    - **R** $f'(x) = 0$ gdzie $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4$

## Geometria

- **R** Napisz równanie prostej prostopadłej do prostej y = 2x + 1 i przechodzącej przez środek okręgu o równaniu : $x^2 - 2x + y^2 + 6y = 0$.

- Oblicz odległość punktu A(1,-4) od prostej y = -3x - 1.

- W trójkąt równoramienny o wysokości dwukrotnie dłuższej od podstawy mającej długość 4 cm wpisano prostokąt o wysokości 6 cm. Oblicz stosunek pól obu figur.

- **R** Wyznacz wymiary walca o objętości V, mającego największe pole powierzchni całkowitej.

- **R** Który ze stożków o danym polu powierzchni całkowitej P, ma największą objętość ?

- Kąt rozwarcia stożka jest równy $\alpha$, a jego objętość wynosi V. Wyznacz pole powierzchni bocznej stożka.

- W stożek wpisano kulę. Stosunek pola powierzchni do pola podstawy stożka równa się 4:3. Wyznacz kąt rozwarcia stożka.

- Rozwiąż trójkąt ABC wiedząc że: a = 6cm, a = $30^0$, b = $80^0$.

## Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa

- Na ile sposobów można ustawić 10 żołnierzy w szeregu.

- W urnie znajduje się 4 kule białe, 3 zielone i 2 niebieskie. Wyciągamy losowo 7 kul. Oblicz prawdopodobieństwo tego że wśród wylosowanych kul znajdują się 3 białe, 2 zielone i 2 niebieskie.

- Spośród cyfr 1,2,3,4,5,6,7 losujemy cztery cyfry. Oblicz prawdopodobieństwo tego że otrzymamy:

  - liczbę o niepowtarzających się cyfrach większą od 7650.

  - liczbę nie większą od 1223

❑ **R** Strzelec strzela do tarczy z prawdopodobieństwem 0,95. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że na 7 strzałów:

- trafi 3 razy
- nie trafi co najmniej 6 razy.

❑ 25% detali pochodzi z zakładu $Z_1$, reszta z $Z_2$. Braki stanowią odpowiednio 4% i 6%. Oblicz prawdopodobieństwo tego że kupimy:

- dobry wyrób
- wadliwy z $Z_2$.

## Typowe, podstawowe zadania z różnych działów

- Oblicz 12% sumy kwadratów liczb 1,5 i 0,75.

- Rozwiąż równanie: $\frac{2}{x} - 1 = 0$.

- Wykonaj działanie: $(-2a^2 + 3b)(4ab - 1)$.

- Rozłóż na czynniki wielomian: $W(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.

- Rozwiąż równanie: $2x^2 - 32=0$.

- Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = 3x^2 + 2$.

- Dla jakiego parametru m, równanie $2mx^2 - 3x + 1= 0$ ma jedno rozwiązanie ?

- Dla jakiego parametru m funkcja $f(x) = -(m + 5)x^2$ przyjmuje wyłącznie wartości dodatnie ?

- Suma kwadratów dwóch liczb wynosi 25, a ich podwojona różnica wy nosi 14. Wyznacz te liczby.

- Doprowadź do prostszej postaci: $\frac{x^3 \cdot \sqrt[3]{x^5}}{x^{-4}}$ i oblicz wartość dla x = -1.

- Rozwiąż równanie: $2^x \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

- **R** Rozwiąż nierówność: $(0,25)^x < 1$.

- Rozwiąż równanie: $\log[\log_3(x)]=1$.

- **R** Wyznacz sumę ciągu $a_n = \frac{1}{2^n}$.

- Oblicz 23 wyraz ciągu $b_n = 3n - 5$

- W ciągu arytmetycznym $a_2 = 3$, $a_5 = 8$. Wyznacz ten ciąg.

- **R** Oblicz granicę ciągu: $\lim_{n\to\infty}\frac{x^3+2x^2-3}{3x^3-4x^2}$.

- Oblicz pole trapezu równoramiennego o dłuższej podstawie mającej długość 12 cm i ramieniu nachylonym do tej podstawy pod kątem $\alpha = 60^0$.

- Obserwator stojący 150m od wysokiej na 20m wieży kontrolnej zobaczył samolot na wysokości jej dachu w momencie podawania komunikatu że znajduje się on 6km od lotniska. Na jakiej wysokości znajdował się samolot ?

- Napisz równanie prostej prostopadłej do prostej o równaniu y = 3x - 2 przechodzącej przez punkt A(-1,3).

- Wyznacz dziedzinę funkcji: $f(x)=\frac{2x-4}{x^2-25}+\log_x(-x+2)$.

- **R** Oblicz granicę niewłaściwą funkcji: $f(x)=\frac{x^2-4}{2x^3+6x}$.

- **R** Wyznacz granice funkcji $f(x) = x^{-1}$ na krańcach przedziałów określoności.

- **R** Wyznacz asymptoty funkcji: $f(x)=\frac{x^2-3x}{3x^2-27}$.

- **R** Zbadaj parzystość funkcji: $f(x) = 4x^6+3$.

- **R** Wyznacz pochodną funkcji: $f(x)=\frac{5x^3-2x}{3x^2-2x+3}$.

- **R** Napisz równanie stycznej do krzywej: $f(x) = -3x^3 + 2x^2 - 4$ w punkcie $x_0 = -2$.

- ☐ **R** Wyznacz ekstrema funkcji: $f(x) = x^3 + 2x^2 - 6x$.

- ☐ Oblicz pole koła wyznaczonego przez okrąg opisany na trójkącie w którym a = 8cm, a = $30^0$.

- ☐ Udowodnij: $(tg^2x - sin^2x)ctg^2x = sin^2x$.

- ☐ **R** Rozwiąż równanie: $2sinx = \sqrt{3}$.

- ☐ **R** Rozwiąż nierówność: $2cosx > 1$.

- ☐ Wyznacz wszystkie charakterystyczne stożkowe (przekroje stożka różnymi płaszczyznami) i zilustruj je.

- ☐ Oblicz objętość czworościanu foremnego o krawędzi 1m

- ☐ Ile wynosi stosunek objętości walca do objętości wpisanego weń stożka.

# Przykłady zadań egzaminacyjnych (1)

**Zad 1** R Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + 2(m-1)x + 1 = 0$ ma dwa różne rozwiązania przeciwnych znaków?

- dla jakiego parametru m, kwadrat sumy tych rozwiązań jest większy od 1?

**Zad 2** R Oblicz długość linii składającej się z nieskończonej liczby półokręgów o średnicach $a, \frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \frac{a}{8} \ldots$

**Zad 3** Rozwiąż trójkąt mając dane: a = 2, b = 9, g = $42^{o}$.

**Zad 4** Daną liczbę a przedstaw jako sumę dwóch takich liczb, aby suma ich kwadratów była najmniejsza.

**Zad 5** Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego pole przekroju zawierającego najdłuższe przekątne jest kwadratem o polu 144.

**Zad 6** R Rozwiąż równanie: $3^{x+2} + 9^{x-1} = 810$.

- przyjmując że a jest rozwiązaniem powyższego równania, rozwiąż równanie $a^x = 7$.

**Zad 7** R Dla jakiego parametru m, funkcja $f(x) = (2m-3)x^2 + 3mx - 1$ przyjmuje wyłącznie wartości ujemne ? Dla jakiego parametru m, miejsca zerowe tej funkcji są liczbami ujemnymi ?

**Zad 8** Rozwiąż równanie: $\frac{2x-3}{x-2} = 1$.

**Zad 9** Rzucamy dwa razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że dwa razy wyrzucimy tę samą ilość oczek.

**Zad 10** Rzucamy dwa razy monetą. Czy zdarzenia: A - „dokładnie raz wypadł orzeł" i B - „co najmniej raz wypadła reszka" są zależne?

**Zad 11** R Rozwiąż równanie: log(3x +4) + log(x + 8) = 2. Przyjmując że a jest rozwiązaniem powyższego równania, rozwiąż równanie asinx = 1.

**Zad 12** Dla jakiego parametru m, układ równań $\begin{cases} 3mx - 4y = -5 \\ 2mx + y = 3 \end{cases}$ posiada rozwiązanie będące parą liczb dodatnich ?

**Zad 13** **R** Dla jakiego m, równanie $(m - 1)x^2 - (m + 1)x + 0{,}25(m + 1) = 0$ ma dwa różne rozwiązania?

**Zad 14** **R** Wyznacz dziedzinę funkcji: $y = \log_2[1-\log(x^2-5x+6)]$. Rozwiąż równanie y = 0.

**Zad 15** **R** Rzucamy pięć razy kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo że trzy razy wyrzucimy mniej niż cztery oczka.

**Zad 16** Rozwiąż równanie: $\log_4[\log_3(\log_2(x-6))] = 0$.

**Zad 17** Napisz równanie prostej prostopadłej do prostej k o równaniu y = -3x + 2 i przechodzącej przez punkt A(-2,4) oraz oblicz odległość tego punktu od prostej k. Wyznacz punkt przecięcia się symetralnych boków ΔABC, wiedząc że B(-5,5), C(0,-1).

**Zad 18** Z cyfr 0,1,2,3,...,9 tworzymy liczby czterocyfrowe o różnych cyfrach. Obliczyć prawdopodobieństwo, że utworzona liczba jest większa od 4000.

**Zad 19** **R** Wyznaczyć dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{\log_{(x-3)}(2x^2 - 3x + 1)}{x^2 - 16}$. Rozwiąż równanie f(x) = 0.

**Zad 20** Obliczyć objętość czworościanu foremnego o krawędzi a = 2 m.

**Zad 21** Między liczby 2 i 12 należy wstawić dwie liczby tak, aby trzy pierwsze tworzyły ciąg geometryczny, a trzy ostatnie ciąg arytmetyczny. Jakie to liczby ?

**Zad 22** Na loterii jest 30 losów, z których 7 wygrywa. Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród 3 losów co najmniej jeden los jest wygrywający.

**Zad 23** **R** Dla jakiego parametru m równanie $(m - 2)x^2 + (4m - 6)x + 5m - 6 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste? Dla jakiego parametru m, równanie to nie posiada rozwiązań, z uwagi na to, że przyjmuje wyłącznie wartości ujemne ?

**Zad 24** Napisz równanie symetralnej odcinka AB, gdzie A(-3,5), B(2,1).

**Zad 25** R Rozwiąż równanie: $2^{x+1} + 4^x = 80$. Przyjmując że a jest rozwiązaniem powyższego równania, rozwiąż równanie $a^x = 2$.

**Zad 26** Siatką drucianą długości 60m należy ogrodzić prostokątny plac przylegający jednym bokiem do muru. Jakie wymiary powinien mieć plac, aby jego pole było największe ?

**Zad 27** Dane są wierzchołki trójkąta ABC: A(-3,1), B(0,-2) i C(-4,0). Napisz równanie środkowej poprowadzonej z wierzchołka A.

**Zad 28** R Rozwiąż równanie: $2\sin x = \sqrt{3}$. Wyznacz zbiór rozwiązań nierówności $2\sin x > \sqrt{3}$.

**Zad 29** Cztery liczby tworzą ciąg geometryczny. Trzecia liczba jest o 9 większa od pierwszej, a druga mniejsza od czwartej o 18. Znajdź te liczby.

**Zad 30** W pierwszym pudełku znajduje się 70% kul zielonych zaś reszta w innym kolorze, a w drugim 30% zielonych zaś reszta w innym kolorze. Jeżeli podczas rzutu dwiema kostkami do gry wypadnie suma oczek większa od 9 to losujemy z pierwszego pudełka, w przeciwnym przypadku z drugiego. Losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo tego że wylosujemy inną kulę niż zieloną .

**Zad 31** Rozwiąż trójkąt mając dane: a=5, b=4, c=6.

**Zad 32** R Rozwiąż równanie: $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$.

**Zad 33** Rzucamy 3 razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo, tego że:

- orzeł wypadnie dokładnie raz,
- orzeł wypadnie co najmniej raz.

**Zad 34** R Rozwiąż równanie : $4^{x+1} + 4^x = 320$ .

**Zad 35** Oblicz pole powierzchni graniastosłupa prostego, w którym podstawa jest trójkątem równobocznym o boku a=6, zaś przekątna ściany bocznej ma długość b=8.

**Zad 36** R Dla jakiego parametru m funkcja $f(x) = x^2 - mx + m + 3$ przyjmuje wyłącznie wartości dodatnie. Dla jakiego parametru m funkcja ta ma dwa różne miejsca zerowe, których suma kwadratów wynosi 1.

**Zad 37** R Rozwiąż równanie: $2\sin x = 1$ . Wyznacz zbiór rozwiązań nierówności $2\sin x \le 1$.

**Zad 38** Suma kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych wynosi 35. Znajdź te liczby.

**Zad 39** Dla jakiego parametru m rozwiązanie układu równań: $\begin{cases} x - y = k - 1 \\ 2x - y = 3 - k \end{cases}$ jest parą liczb o przeciwnych znakach ?

**Zad 40** R Rozwiąż równanie: $4 - \log x = 3\sqrt{\log x}$ .

**Zad 41** R Rozwiąż nierówność $k^x < \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 - 5}{10n^2 + 4n}$ , gdzie k jest rozwiązaniem powyższego równania.

**Zad 42** Udowodnij tożsamość: $\mathrm{ctg}x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1}{\sin x}$ .

**Zad 43** Rozwiąż trójkąt wiedząc że: a = 4cm, b = 6cm, a = $42^{o}$.

**Zad 44** W urnie znajduje się 12 kul białych, 5 zielonych i 8 niebieskich. Losujemy 8 kul bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy 2 kule białe, 4 zielone, reszta niebieskie.

**Zad 45** R Przekrój osiowy walca ma obwód 20 cm. Jak dobrać wymiary walca aby pole jego powierzchni bocznej było największe ? Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, wpisanego w ten walec.

**Zad 46** R Rozwiąż równanie: $2\cos x = -1$.

**Zad 47** R Rozwiąż równanie: $2^{2x-1} \cdot 128 = (0{,}25)^{x-3} \cdot 32^{x+5}$

**Zad 48** Mając dane liczby -4 i 50, wyznacz takie liczby x, y, aby liczby -4, x, y były trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego, zaś liczby x, y, 50 były trzema początkowymi wyrazami ciągu geometrycznego.

**Zad 49** Oblicz pole powierzchni bocznej stożka, którego średnica podstawy ma długość 12cm, a kąt rozwarcia stożka ma miarę $60^{o}$.

**Zad 50** **R** Rozwiąż równanie: log(3x+4) + log(x+8) = 2.

**Zad 51** **R** Dla jakiego m, rozwiązania równania: $x^2 + (3m - 2)x + m - 2 = 0$ spełniają warunek $x_1 + x_2 > 8$? Kiedy suma odwrotności kwadratów rozwiązań jest mniejsza od 0?

**Zad 52** W urnie znajduje się 10 kul białych i 6 czerwonych. Losujemy bez zwracania 5 kul. Oblicz prawdopodobieństwo tego że wśród wylosowanych kul będzie co najmniej jedna biała.

**Zad 53** Oblicz sumę liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez 3.

**Zad 54** **R** Dla jakich wartości parametru k rozwiązania równania: $x^2+2(3k-1)x+3k+11 = 0$ są liczbami rzeczywistymi różnych znaków. Kiedy odwrotność sumy kwadratów tych rozwiązań jest większa od 0?

**Zad 55** Pole trójkąta jest równe 48 $cm^2$. Wysokość trójkąta jest o 4cm dłuższa od odpowiadającej jej podstawy. Znajdź długość podstawy trójkąta.

**Zad 56** W stożek o wysokości 20cm i promieniu podstawy 10cm wpisano walec o promieniu podstawy 5cm. Oblicz stosunek objętości walca do objętości stożka.

**Zad 57** **R** Wyznacz dziedzinę funkcji: $f(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{x^2-4} + \log(-x^2 - 5x + 6)$.

Rozwiąż nierówność $f(x) \geq \log\left(-x^2 - 5x + 6\right)$.

**Zad 58** Rzucamy dwoma kostkami. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że uzyskana suma oczek wynosi co najmniej 3.

**Zad 59** Rozwiąż równanie: $\log_2\left\{\log_4\left[\log\left(2x-5\right)\right]\right\} = 0$.

**Zad 60** Trzy różne liczby, których suma równa się 63 tworzą ciąg geometryczny. Liczby te są pierwszymi, czwartym i szesnastym wyrazem pewnego ciągu arytmetycznego. Jakie to liczby?

**Zad 61** Oblicz pole powierzchni bryły utworzonej przez obrót trójkąta równobocznego o boku a= 2m dookoła jednego z jego boków. Wyznacz objętość bryły ograniczonej tą figurą i powierzchnią i opisanej nań kuli.

**Zad 62** **R** Dla jakich wartości parametru m równanie $(8m-11)x^2 - 5x + m - 1 = 0$ ma dokładnie 1 pierwiastek.

**Zad 63** W kartonie znajdują się 60 żarówek, w tym 3 wadliwe. Z kartonu wyjęto 6 żarówek. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wszystkie wyjęte żarówki są dobre.

**Zad 64** **R** Oblicz sumę nieskończonego ciągu geometrycznego, w którym $a_1 = \frac{30}{7}$ i $q = -\frac{3}{4}$. Dla jakich x ciąg geometryczny, w którym $a_1 = \frac{30}{7}$ i $q = \frac{x-2}{3x+1}$ jest zbieżny.

**Zad 65** Liczba r = 2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 7$. Oblicz pozostałe pierwiastki W(x).

**Zad 66** **R** Oblicz obwód trójkąta, którego wierzchołkami są punkty przecięcia się okręgu $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ z osią OX i środek tego okręgu.

**Zad 67** Korzystając z definicji logarytmu oblicz x jeżeli $\log_4[\log_3(\log_2 x)] = 0$

**Zad 68** **R** Rozwiąż nierówność $\log_x \frac{2x-1}{x-1} > 1$

**Zad 69** **R** Rozwiąż równanie: $2 \cdot 16^x - 17 \cdot 4^x + 8 = 0$

**Zad 70** Klasa licząca 30 uczniów, w tym 6 dziewcząt otrzymała 5 biletów do kina. Bilety rozdzieliła drogą losowania. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród posiadaczy biletów znajdą się 4 uczennice.

**Zad 71** **R** Oblicz granicę ciągu o wyrazie $a_n = \frac{5+3n}{2n+3}$. Dla jakich wartości n wyrazy tego ciągu są większe od $\frac{23}{15}$, a mniejsze od $\frac{14}{9}$.

**Zad 72** **R** Rozwiąż nierówność: $x(x^2 - 4x + 3)(3x - 4) < 0$.

**Zad 73** Proste y = 2, 2x - y + 10 = 0 i 4x + 3y = 0 wyznaczają trójkąt ABC. Oblicz współrzędne wierzchołków i pole trójkąta ABC.

**Zad 74** **R** Określ dziedzinę funkcji: $f(x) = \log_{2x}(x^2 - 5x + 6)$. Dla jakich wartości x, wartości tej funkcji f(x) są większe od 1.

**Zad 75** **R** Rozwiąż równanie: $\sin^2 x + 3\sin x + 2 = 0$

**Zad 76** **R** Dla jakich wartości k równanie $x^2 - (k + 2)x + 1 = 0$ ma 2 różne rozwiązania rzeczywiste, których suma jest większa od 5.

**Zad 77** **R** Rozwiąż układ równań: $\begin{cases} x + 2y + z = 2m \\ -x + 4y + z = 8 \\ 2x - y - z = m - 8 \end{cases}$ Dla jakich wartości m rozwiązania x, y, z tworzą ciąg geometryczny.

**Zad 78** **R** Dla jakich wartości parametru k rozwiązania równania $x^2 + 2(3k - 1)x + 3k + 11 = 0$ są liczbami rzeczywistymi różnych znaków.

**Zad 79** Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, w którym krawędź podstawy a = 10 cm i kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy wynosi $60^o$.

**Zad 80** **R** Rozwiąż równanie: $4^{x+1} + 4^x = 320$

**Zad 81** Objętość prostopadłościanu wynosi 216 $cm^3$. Liczby wymiarowe krawędzi są wyrazami ciągu geometrycznego i suma ich wynosi 21. Oblicz długości krawędzi.

**Zad 82** **R** Rozwiąż równanie: $tg^2 x - 2tgx + 1 = 0$.

**Zad 83** Proste y = 2, 2x - y + 10 = 0 i 4x + 3y = 0 wyznaczają trójkąt ABC. Oblicz współrzędne wierzchołków A, B i C.

**Zad 84** Dla jakich wartości k wielomian $W(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - 2x^2 + x + k$ jest podzielny przez dwumian x + 1.

**Zad 85** W loterii jest 9 biletów, z których 3 wygrywają. Oblicz prawdopodobieństwo, że posiadacz 2 biletów ma co najmniej 1 los wygrywający.

**Zad 86** R Rozwiąż równanie 2log x = log (5x - 4). Dla jakich wartości m dziedziną funkcji

$f(x) = \log\left[(2m-3)x^2 + (6-m) + \frac{1}{7}(m-9)\right]$ jest R

**Zad 87** Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 5. Oblicz pole trójkąta.

**Zad 88** Dane są wierzchołki A = (2,4), B = (6,3), C = (4,-1) równoległoboku ABCD. Oblicz pole i obwód równoległoboku.

**Zad 89** R Rozwiąż równania trygonometryczne:

- $tg^3x = tg\, x$
- $\sin^4x + \cos^4x = 1$

**Zad 90** R Dla jakich wartości m równanie $x^2 + (m-5)x + m^2 + m + \frac{1}{4} = 0$ ma dwa pierwiastki jednakowych znaków.

**Zad 91** R Rozwiąż równanie $2x + 4 + \frac{8}{x} + ... = 5x + 3$ .

**Zad 92** R Przez punkty przecięcia krzywych o równaniach: $y = 2x^2 - 4x + 4$ i $y = x^2 + 4$ poprowadzono prostą k. Napisz równanie prostej k. Podaj równanie prostej prostopadłej do k i równoległej do k przechodzącej przez środek okręgu $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$

**Zad 93** W ciągu arytmetycznym dane są q = 2, n = 8, $S_8 = 510$. Obliczyć $a_1$ i $a_8$.

**Zad 94** R Wyznacz dziedzinę funkcji: $f(x) = \sqrt{\log(x^2 - 7x + 13)}$

**Zad 95** R Rozwiąż nierówność: $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) - \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6) > -1$

**Zad 96** W stożek, którego przekrój osiowy jest trójkątem równobocznym wpisano kulę. Obliczyć stosunek objętości stożka do objętości kuli.

**Zad 97** R Rozwiąż równanie: $3^{2x-1} + 3^{x+1} = 12$.

**Zad 98** Dla jakiej wartości a reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 2ax^3 - 4x^2 + ax - 2a$ przez $x - 2$ wynosi -8 ?

**Zad 99** Środek okręgu przechodzącego przez punkty A (3,0); B(-1, 2) należy do prostej o równaniu $x - y + 2 = 0$. Znaleźć równanie okręgu.

**Zad 100** Rozłóż wielomian $W(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 14x - 8$ na czynniki wiedząc, że liczby $r_1 = 1$, $r_2 = -2$ są pierwiastkami tego wielomianu.

**Zad 101** W urnie znajdują się 3 kule białe i 4 czarne. Losujemy z urny dwie kule. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosujemy dwie kule białe?

**Zad 102** Oblicz pole powierzchni całkowitej stożka, w którym kąt między tworzącą i płaszczyzną podstawy wynosi $\alpha$, zaś pole przekroju osiowego wynosi P.

**Zad 103** **R** Dla jakich wartości parametru $m \in R$ równanie $x + \frac{1}{x} = m$ nie ma rozwiązań rzeczywistych?

**Zad 104** Na loterii jest 15 losów, z których 20% to losy wygrywające. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród kupionych 2 losów znajduje się los wygrywający?

**Zad 105** **R** Rozwiąż równanie $\log 2 + \log (4^{x-2} + 9) = 1 + \log (2^{x-2} + 1)$

**Zad 106** **R** Dany jest ciąg o n-tym wyrazie $b_n = \frac{an^2 - 1}{(a-1)n^2 + n}$. Wyznaczyć wartość a tak, aby granicą tego ciągu była liczba mniejsza od liczb spełniających równanie z punktu a).

**Zad 107** **R** Rozwiąż równania:

- $\cos x - \cos 2x = 1$
- $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^5 x + \ldots = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**Zad 108** Napisz równanie osi symetrii okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - x = 0$, do której należy punkt A (2,2)

**Zad 109** Rzucamy trzy razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:

- za każdym razem wypadł orzeł
- co najmniej raz wypadł orzeł.

**Zad 110** **R** a) Dla jakich wartości k dziedziną funkcji: $P(X) = \frac{x}{x^2 - 6x + k}$ , jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych ?

**Zad 111** Obliczyć długość ramienia trapezu równoramiennego o polu 44 $cm^2$ wiedząc, że jego podstawy mają długość 8cm i 14 cm.

**Zad 112** Rzucamy kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że choć raz wypadnie szóstka?

**Zad 113** **R** a) Dla jakich wartości parametru m funkcja: $y = (3m - 5)x^2 - (2m - 1)x + \frac{1}{4}(3m - 5)$ ma jedno miejsce zerowe? Dla jakich wartości m najmniejsza wartość funkcji jest liczbą dodatnią?

**Zad 114** **R** Rozwiąż: log (3x + 4) + log (x + 8) = 2

**Zad 115** Napisać równanie okręgu o środku w punkcie P(5,4) wiedząc, że okrąg ten jest zewnętrznie styczny z okręgiem o równaniu: $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$.

**Zad 116** Dany jest układ równań: $\begin{cases} x - my = m \\ mx - y = 2 \end{cases}$ o niewiadomych x i y. Rozwiąż ten układ równań

**Zad 117** **R** Rozwiąż równanie: $\log_x (x + 2) = 2$

**Zad 118** Pole rombu ABCD wynosi 10. Przeciwległe wierzchołki A i C rombu mają współrzędne A (1,1) i C (3,5). Znaleźć współrzędne wierzchołków B i D.

**Zad 119** **R** Dla jakich wartości parametru m równanie: $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ ma dwa pierwiastki. Dla jakich wartości m pierwiastki rzeczywiste równanie zawarte są między liczbami -2 i 4.

**Zad 120** Trzy liczby o sumie 15 tworzą ciąg arytmetyczny. Środkowa zaś liczba zmniejszona o dwa tworzy z pozostałymi ciąg geometryczny. Znaleźć te liczby.

**Zad 121** Powierzchnia boczna walca jest po rozwinięciu prostokątem, którego przekątna d tworzy z bokiem równym wysokości kąt $\alpha$ . Wyznaczyć objętość walca.

**Zad 122** **R** Rozwiąż: $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} < 56$

**Zad 123** W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym o wysokości h = 10 cm krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $45^o$. Oblicz objętość ostrosłupa.

**Zad 124** **R** a) Dla jakich wartości m równanie $x^2 + (1 - m)x + m^2 + 1 = 0$ ma dwa pierwiastki? Dla jakich m pierwiastki równania spełniają warunek $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 1$ ?

**Zad 125** **R** Rozwiąż równanie: $\log_3 (3^x - 8) = 2 - x$

**Zad 126** W urnie znajduje się 6 kul białych i 4 czarne. Losujemy jednocześnie trzy kule. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania trzech kul białych?

**Zad 127** **R** Wyznacz wartość parametru m tak, aby trójmian $y = (m - 1)x^2 - (m + 1)x + (m + 1)$

- miał dwa miejsca zerowe
- dla jakiej wartości parametru m trójmian ma dwa miejsca zerowe spełniające warunek $x_1^2 + x_2^2 = 4$

**Zad 128** **R** Rozwiąż:

- $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$
- $\left(8\sqrt{8}\right)^{x-3} > \left(\frac{2\sqrt{2}}{8}\right)^{x+1}$

**Zad 129** Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkty A = (-2,3) i B = (4,0), którego środek należy do prostej x - y + 1 = 0.

**Zad 130** **R** Liczby $\log_2 (x - 4)$; $\log_2 (2x)$; $\log_2 x^2$ są trzema pierwszymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Oblicz x.

**Zad 131** **R** Rozwiąż równania:

- $\log (x - 3) - \log(2 - 3x) = 1$
- $x^{\frac{\log x+5}{3}} = 10^{5+\log x}$

**Zad 132** Iloma sposobami można umieścić 20 kul w trzech szufladach, tak aby w pierwszej było ich 4, w drugiej 6, a w trzeciej 10 ?

**Zad 133** **R** Dla jakich wartości parametru k równanie log kx = 2 log (x + 1) ma dokładnie jedno rozwiązanie.

**Zad 134** Między liczby 3 i x wstawiono liczbę y tak, że liczby 3, y, x tworzą ciąg arytmetyczny. Jeżeli liczbę y pomniejszymy o 6 to liczby 3, y - 6, x utworzą ciąg geometryczny. Oblicz x i y.

**Zad 135** **R** Rozwiąż równania:

- $3^{2x-1} + 3 \cdot 3^x - 12 = 0$
- $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$

**Zad 136** **R** Określ dziedzinę funkcji: $y = \dfrac{\sqrt{\log\left(9-x^2\right)}}{3^x - 1}$

**Zad 137** **R** Napisz równanie okręgu współśrodkowego z okręgiem: $x^2 + y^2 + 3x - 4y - 1 = 0$ i przechodzącego przez punkt A = (-3, 4)

**Zad 138** **R** Rozwiąż równanie: $6^{x+1} + 6^{1-x} = 37$

**Zad 139** **R** Rozwiąż równanie: $\dfrac{2\log x}{\log(5x-4)} = 1$

**Zad 140** **R** Znaleźć współrzędne środka i promień okręgu o równaniu: $x^2 + 2x + y^2 - 2x - 2 = 0$

**Zad 141** Dziesięciu abiturientów zdaje egzamin dojrzałości z matematyki. Iloma sposobami komisja egzaminacyjna może wystawić oceny, jeśli:

- żaden ze zdających nie otrzyma oceny niedostatecznej
- każdy ze zdających otrzyma ocenę co najmniej dobrą.

**Zad 142** Wyznacz dziedziny funkcji:

- $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x-5}}{2^x - 8}$
- **R** $f(x) = \sqrt{\sin x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

**Zad 143** **R** Rozwiąż równanie: $3^{\log x} = \dfrac{1}{27}$

**Zad 144** Na ile sposobów można spośród oddziału składającego się z 3 oficerów, 8 podoficerów i 60 szeregowców wybrać grupę składającą się z jednego oficera, dwóch podoficerów i 20 szeregowców?

**Zad 145** Rozwiąż nierówności:

- $-x^2 + 4x - 4 < 0$
- **R** $|x| < 2x^2 + x + 3$

**Zad 146** **R** Wiadomo, że liczba 1 jest pierwiastkiem równania $x^3 + 2x^2 - x + m = 0$, gdzie m jest parametrem. Obliczyć najmniejszy pierwiastek tego równania.

**Zad 147** Oblicz objętość stożka, którego tworząca ma długość 10 cm a kąt między tworzącą a podstawą jest równy $60^o$.

**Zad 148** **R** Dla jakiej wartości parametru m równanie: $(2m - 3)x^2 + 4mx + m - 1 = 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek?

**Zad 149** Oblicz sumę liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez trzy.

**Zad 150** **R** Rozwiąż równania:

- $3^{2x-1} + 3^{x+1} = 12$
- $2^{\sqrt{x}} = \sqrt{16^{\sqrt{x}}} - 2$

**Zad 151** Na loterii jest 10 losów, z czego 3 wygrywają. Kupujemy dwa losy. Obliczyć prawdopodobieństwo, że kupimy dokładnie jeden wygrywający los.

**Zad 152** Trapez prostokątny o podstawach a = 18 i b = 10 oraz kącie ostrym $\alpha=30^o$ obraca się dookoła dłuższej podstawy. Oblicz pole powierzchni otrzymanej bryły.

**Zad 153** **R** Rozwiąż równanie $7\cdot5^x - 5^{x+2} + 450 = 0$

**Zad 154** Określ dziedziny funkcji:

- $y = \dfrac{\log\left(4 - x^2\right)}{\sqrt{x^2 - 4x}}$
- **R** $y = \log_2\left[1 - \log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x^2+1}{x-3}\right]$

**Zad 155** Dane są dwa punkty A = (-3, 1) i B = (1, 4)

- Napisz równanie symetralnej odcinka $\overline{AB}$.
- Gdzie znajduje się taki punkt C, że pole trójkąta ABC jest równe 10? Podaj wszystkie możliwości.

**Zad 156** **R** Rozwiąż równanie log (3x + 4) + log (x + 8) = 2

**Zad 157** Rzucamy 3 razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń: A - ”dokładnie raz wypadł orzeł”, B - „co najmniej raz wypadła reszka”. Sprawdź, czy są to zdarzenia zależne.

**Zad 158** Trzy liczby 2, x, y tworzą ciąg arytmetyczny. Jeżeli do ostatniej dodamy dwa, to powstanie ciąg geometryczny. Jakie to liczby?

**Zad 159** W dwóch urnach znajdują się kule białe i czarne. W pierwszej jest 5 białych i 3 czarne, a w drugiej są 4 czarne i 4 białe. Wybieramy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo, że jest biała?

**Zad 160** Wyznacz dziedziny funkcji:

- $y = \sqrt{9 - x^2} + \sqrt{x^2 - 2x}$
- **R** $y = \sqrt{2 - \log_2 \frac{x+1}{x^2}}$

**Zad 161** **R** Dla jakich wartości m funkcja y = $x^2$ + (3m - 2) x + m + 2 ma dwa miejsca zerowe różnych znaków

**Zad 162** Oblicz objętość czworościanu o krawędzi a.
**R** Oblicz cosinus kata dwuściennego tego czworościanu.

**Zad 163** Rozwiąż równanie: $0{,}5^x + 0{,}5^{x+1} + 0{,}5^{x+2} = 2\sqrt{0{,}5^x + 2}$

**Zad 164** **R** Rozwiąż nierówność: $1 + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} + ... = 1 + x$

**Zad 165** Przekątna przekroju osiowego walca tworzy z podstawą kąt $\alpha$ i ma długość d. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej walca.

**Zad 166** Suma dwóch liczb jest równa 7, a suma ich kwadratów 29. Znajdź te liczby.

**Zad 167** **R** Dla jakich wartości m funkcja f(x) = (m - 1)$x^2$ + (m - 1)x + m przyjmuje tylko wartości ujemne?

**Zad 168** **R** Liczby log 3, log ($3^{x+1}$ + 6), log ($3^{x+2}$ + 18) tworzą ciąg arytmetyczny. Wyznacz x.

**Zad 169** Pole przekroju osiowego stożka jest równe $16\sqrt{3}$. Oblicz objętość tego stożka, wiedząc, że przekrój osiowy jest trójkątem równobocznym.

- W ten stożek wpisano walec, którego przekrój osiowy jest kwadratem. Oblicz wymiary walca.

**Zad 170** **R** Oblicz długość cięciwy wyznaczonej przez okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ i prostą x - y - 3 =0

- Napisz równanie okręgu symetrycznego do danego względem tej prostej.

**Zad 171** **R** Rozwiąż równanie $6^{2x-3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{x-2}=\left(\frac{\sqrt{6}}{36}\right)^{2x-5}$

**Zad 172** Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego krawędź boczna jest nachylona do podstawy pod kątem $\alpha=60^{o}$ a krawędź podstawy ma długość 12 cm.

**Zad 173** **R** Rozwiąż równanie: $\log\left(x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+...\right)=2\log x$

**Zad 174** Na loterii jest 20 losów, z czego 5 jest wygrywających. Kupujemy 3 losy. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród kupionych losów są dokładnie 2 wygrywające.

**Zad 175** Dla jakich wartości parametru m rozwiązania x, y układu $\begin{cases}2x-my=3\\ x+y=m\end{cases}$ są parą liczb dodatnich. Przedyskutuj ilość rozwiązań układu $\begin{cases}3x+my=1\\ mx+12y=2\end{cases}$ w zależności od parametru m.

**Zad 176** **R** Rozwiąż równanie: $2\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)^2-9\log_{\frac{1}{2}}x+4=0$

**Zad 177** Dana jest prosta 3x - 5y + 1 = 0 i punkt A = (-5, 2). Wyznacz współrzędne punktu symetrycznego do punktu A względem tej prostej.

**Zad 178** **R** Oblicz sumy nieskończonych ciągów:

- $3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + ...$
- $(1 - \log x) + (1 - \log x)^2 + (1 - \log x)^3 + ...$ i określ dla jakich x ta suma istnieje.

**Zad 179** Punkty A = (1, -4), B = (2, -3), C = (-1, 0) należą do wykresu funkcji $y = ax^2 + bx + c$. Wyznacz współczynniki a, b, c i zbadaj, dla jakich x trójmian ten przyjmuje wartości dodatnie.

**Zad 180** **R** Rozwiąż równanie $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + ... = \frac{1}{2}$, gdzie lewa jego strona jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego.

**Zad 181** Oblicz objętość sześcianu o przekątnej 8 cm. Oblicz stosunek objętości kuli wpisanej w sześcian o krawędzi a do kuli opisanej na tym sześcianie.

**Zad 182** **R** Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + 2(m-1)x + 1 = 0$ ma dwa różne rozwiązania tych samych znaków? Dla jakiego parametru m, suma kwadratów tych rozwiązań jest większa od 1.

**Zad 183** **R** Podaj przedziały w których funkcja $y = x^3 + 2x^2 - 3x$ jest rosnąca.

**Zad 184** Rozwiąż trójkąt mając dane: a = 2, b = 9, g = 42°.

**Zad 185** **R** Wyznacz pochodną funkcji: $f(x) = \frac{2x^2 - 6x}{5x^3 + 2}$ .

**Zad 186** Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego pole przekroju zawierającego najdłuższe przekątne jest kwadratem o polu 144.

**Zad 187** **R** Rozwiąż równanie: $3^{x+2} + 9^{x-1} = 810$.

**Zad 188** **R** Wyznacz asymptoty funkcji: $f(x) = x + \frac{3}{x}$.

**Zad 189** Rozwiąż równanie: $\frac{2x-3}{x-2}=1$.

**Zad 190** **R** rozwiąż nierówność: $\frac{2x-3}{x-2}>1$.

**Zad 191** Spośród 10 mężczyzn i 8 kobiet wylosowano 7 - osobową delegację. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w skład delegacji wejdzie co najmniej jedna kobieta.

**Zad 192** **R** Strzelec strzela do tarczy 5 razy. Oblicz prawdopodobieństwo tego że trafi ją co najmniej raz wiedząc że prawdopodobieństwo pojedynczego trafienia wynosi 0,8. Oblicz prawdopodobieństwo tego że nie trafi ją nie mniej niż trzy razy.

**Zad 193** **R** Rozwiąż równanie: log(4-x)=log3x + log(1+x)

**Zad 194** **R** Określ przedziały w których funkcja : $y = x^3 + x^2 - x + 1$ jest rosnąca.

**Zad 195** **R** Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji: $y = x^3 + 8$ w punkcie x = 1.

**Zad 196** **R** Wyznacz dziedzinę funkcji: $y = \log_2[1-\log(x^2-5x + 6)]$

- dla jakiego parametru m, funkcja $y = \log(x^2 - 5mx +6)$ jest określona dla wszystkich liczb R?

**Zad 197** Sześcian pomalowano na zielono i rozcięto na 125 jednakowych sześcianików. Oblicz prawdopodobieństwo tego że losowo wybrany sześcianik jest:

- pomalowany z 3 stron
- pomalowany z 1 strony
- pomalowany z 2 stron
- niepomalowany.

**Zad 198** Rozwiąż równanie: $\log_4[\log_3(\log_2 x)]=1$

**Zad 199** **R** Wyznacz pochodną funkcji: $f(x)=\frac{3x^2-5x+9}{x^2+2}$. Dla jakiego parametru m, równanie f(x) = m nie ma rozwiązania ?

**Zad 200** Z cyfr 1,2,3,4 tworzymy liczby czterocyfrowe. Obliczyć prawdopodobieństwo, że utworzona liczba o różnych cyfrach jest większa od 4340.

**Zad 201** **R** Zbadaj monotoniczność funkcji: $f(x) = x^3 - 27x$ .

**Zad 202** Obliczyć objętość czworościanu foremnego o krawędzi a = 1m. Oblicz stosunek objętości kuli wpisanej do objętości kuli opisanej na tym czworościanie.

**Zad 203** Na loterii jest 30 losów, z których 7 wygrywa. Oblicz prawdopodobieństwo, że kupując trzy losy co najmniej jeden los jest wygrywający.

**Zad 204** **R** Wyznacz ekstrema funkcji: $f(x) = x^3 - 4x$. Oblicz długość odcinka wyznaczonego przez punkty przecięcia funkcji $f'(x)$ i prostej $y = 2x - 2$.

**Zad 205** Napisz równanie symetralnej odcinka AB, gdzie A(-3,5), B(2,1).

**Zad 206** **R** Rozwiąż równanie: $4^x - 2^{x-1} = -1$

**Zad 207** Wyznacz ekstrema funkcji: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$. Dla jakiego parametru m, funkcja $f'(x) = (m + 2)x$ nie posiada miejsc zerowych ?

**Zad 208** Dane są wierzchołki trójkąta ABC: A(-3,1), B(0,-2) i C(-4,0). Napisz równanie środkowej poprowadzonej z wierzchołka A.

**Zad 209** **R** Rozwiąż równanie: $2\sin x = \sqrt{3}$

**Zad 210** Cztery liczby tworzą ciąg geometryczny. Trzecia liczba jest o 9 większa od pierwszej, a druga mniejsza od czwartej o 18. Znajdź te liczby.

**Zad 211** **R** Wyznacz asymptoty funkcji: $f(x) = \frac{2x-3}{x^2-9}$. Co należałoby zmienić w powyższej funkcji aby miała jedną asymptotę pionową x = 3 i jedną asymptotę poziomą y = 0,25 . Uzasadnij.

**Zad 212** **R** Dla jakiego parametru m, funkcja $f(x) = (2m-3)x^2 + 3mx - 1$ przyjmuje wyłącznie wartości ujemne ? Dla jakiego parametru m, miejsca zerowe tej funkcji są liczbami dodatnimi ?

**Zad 213** **R** Rozwiąż równanie: $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$.

**Zad 214** Rzucamy 3 razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo, tego że:

- orzeł wypadnie dokładnie raz,
- orzeł wypadnie co najmniej raz.

**Zad 215** **R** Rozwiąż równanie: log(3x +4) + log(x + 8) = 2. Przyjmując że a jest rozwiązaniem powyższego równania, rozwiąż równanie asinx = -1.

**Zad 216** Oblicz pole powierzchni graniastosłupa prostego, w którym podstawa jest trójkątem równobocznym o boku a=6, zaś przekątna ściany bocznej ma długość b=8.

**Zad 217** **R** Zbadaj monotoniczność funkcji: $y = -x^4 + x^2 + 1$ .

**Zad 218** **R** Rozwiąż równanie: $2^{x+1} + 4^x = 80$. Przyjmując że k jest rozwiązaniem powyższego równania, rozwiąż równanie $k^x = 5$.

**Zad 219** Suma kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych wynosi 35. Znajdź te liczby.

**Zad 220** **R** Wyznacz pochodną funkcji: $y = (x^2-8)(x^4 + 5) + x^3\sin x$.

**Zad 221** **R** Rozwiąż równanie: $4 - \log x = 3\sqrt{\log x}$ .

**Zad 222** **R** Rozwiąż nierówność $k^x < \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 - 5}{10n^2 + 4n}$ , gdzie k jest rozwiązaniem powyższego równania.

**Zad 223** **R** Wyznacz ekstrema lokalne funkcji: $f(x) = \frac{x-3}{x^2-4}$.

**Zad 224** **R** Dla jakiego parametru m, funkcja $f(x) = mx^2 - 2(m - 1)x + m - 3$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe ?

**Zad 225** W urnie znajduje się 12 kul białych, 5 zielonych i 8 niebieskich. Losujemy 8 kul. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy 2 białe, 4 zielone, reszta niebieskie.

**Zad 226** **R** Zbadaj monotoniczność funkcji: $f(x)=\frac{x-2}{x^2-2}$.

**Zad 227** **R** Rozwiąż równanie: 2cosx = -1. Wyznacz zbiór rozwiązań nierówności 2cosx < -1.

**Zad 228** **R** Rozwiąż równanie: $2^{2x-1}\cdot 128=(0,25)^{x-3}\cdot 32^{x+5}$

**Zad 229** **R** Określ ekstrema funkcji: $y=x+\frac{3}{x}$.

**Zad 230** Oblicz pole powierzchni bocznej stożka, którego średnica podstawy ma długość 12, a kąt rozwarcia stożka ma miarę $30^o$.

**Zad 231** W sklepie znajduje się 25% wyrobów z zakładu I, reszta pochodzi z zakładu II. Wśród nich jest odpowiednio 5% i 8% wyrobów z usterkami. Oblicz prawdopodobieństwo tego że losowo wybrany wyrób jest dobry.

**Zad 232** Oblicz sumę liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez 3.

**Zad 233** **R** Dla jakich wartości parametru k rozwiązania równania: $x^2 + 2(3k - 1)x + 3k + 11 = 0$ są liczbami rzeczywistymi różnych znaków. Dla jakiego m, suma odwrotności kwadratów jest większa od 1?

**Zad 234** Pole trójkąta jest równe 48 cm Wysokość trójkąta jest o 4cm dłuższa od odpowiadającej jej podstawy. Znajdź długość podstawy trójkąta.

**Zad 235** Wyznacz dziedzinę funkcji: $f(x)=\frac{\sqrt{x-3}}{x^2-4}+\log(x+2)$.

**Zad 236** **R** Zbadaj monotoniczność funkcji: $f(x) = x^2(x - 3)$ Dla jakich parametrów m i n, funkcja $g(x)=\frac{f(x)}{mx^n+3}$ posiada asymptotę poziomą o równaniu y = 0,25? Uzasadnij.

**Zad 237** Rzucamy dwoma kostkami. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że uzyskana suma oczek wynosi co najmniej cztery.

**Zad 238** Rozwiąż równanie: $\log_2\{\log_4[\log(2x-5)]\}=0$.

**Zad 239** **R** Wyznacz pochodną funkcji: $f(x)=\frac{-x^3+2}{2x^2-5x+1}$.

**Zad 240** **R** Dla jakiego m, zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 - 2(m-1)x + 2m^2 + 3m - 1 > 0$ jest zbiór liczb rzeczywistych ?

**Zad 241** Dla jakich wartości parametru m równanie $mx^2 + 2(m-1)x + m - 3 = 0$ ma jedno rozwiązanie? Znajdź ten pierwiastek.

**Zad 242** **R** Zbadaj monotoniczność funkcji $y = x^3 + 2x^2 - 4x$.

**Zad 243** Rozwiąż trójkąt mając dane: $a = 4$, $b = 8$, $\gamma = 50^o$.

**Zad 244** **R** Wyznacz pochodną funkcji: $f(x)=\frac{6x^2-4x}{2x^2+2x-4}$.

**Zad 245** Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego pole przekroju zawierającego najdłuższe przekątne jest kwadratem o polu 256 $cm^2$.

**Zad 246** **R** Rozwiąż równanie: $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$.

**Zad 247** **R** Wyznacz asymptoty funkcji: $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-4}$.

**Zad 248** **R** Rozwiąż równanie: $\frac{x+3}{x+2}-\frac{x-3}{x-2}=\frac{x^2}{x^2-4}+1$.

**Zad 249** Rozwiąż nierówność: $\frac{2x-3}{x-2}>1$.

**Zad 250** Spośród 8 mężczyzn i 6 kobiet wylosowano 5 - osobową delegację. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w skład delegacji wejdzie co najmniej jeden mężczyzna.

**Zad 251** **R** Strzelec strzela do tarczy 6 razy. Oblicz prawdopodobieństwo tego że trafi ją co najmniej raz wiedząc że prawdopodobieństwo pojedynczego trafienia wynosi 0,8.

**Zad 252** **R** Rozwiąż równanie: log(4-x)=log3x + log(1+x)

**Zad 253** **R** Zbadaj monotoniczność i ekstrema funkcji : $y = x^3 + x^2 - x + 1$.

**Zad 254** **R** Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji: $y = x^3 - 3$ w punkcie x = 2.

**Zad 255** **R** Wyznacz dziedzinę funkcji: $y = \log(x^2 - 5x + 6) + \frac{\sqrt{3x - 6}}{x}$

**Zad 256** Dla jakiego parametru m, funkcja $y = \log(x^2 - 5mx + 6)$ jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych?

**Zad 257** Rozwiąż równanie: $\log_4[\log_3(\log_2 x)]=1$

**Zad 258** **R** Wyznacz pochodną funkcji: $f(x) = \frac{2x^2 - 6x + 9}{x^2 + 2x + 1}$. Dla jakiego parametru m, równanie f(x) = m nie posiada rozwiązania ?

**Zad 259** Z cyfr 1,2,3,4,5 tworzymy liczby czterocyfrowe o różnych cyfrach. Obliczyć prawdopodobieństwo, że utworzona liczba jest większa od 5412.

**Zad 260** **R** Zbadaj monotoniczność i ekstrema funkcji: $f(x) = x^3 - 27x$ .

**Zad 261** Obliczyć objętość kuli wpisanej w walec o objętości $32\pi$ $cm^3$. Oblicz stosunek pola powierzchni kuli wpisanej do pola powierzchni kuli opisanej na tym walcu.

**Zad 262** **R** Rozwiąż równanie $2x + 4 + \frac{8}{x} + \ldots = 5x + 3$ .

**Zad 263** Na loterii jest 20 losów, z których 10 wygrywa. Oblicz prawdopodobieństwo, że kupując cztery losy co najmniej jeden los jest wygrywający.

**Zad 264** **R** Zbadaj monotoniczność i ekstrema funkcji: $f(x) = x^3 - 243x$. Oblicz długość odcinka wyznaczonego przez punkt przecięcia funkcji f'(x) z osią OY i miejsca zerowe. Rozważ przypadki.

**Zad 265** Napisz równanie symetralnej odcinka AB, gdzie A(-3,5), B(2,1).

**Zad 266** **R** Rozwiąż równanie: $2 \cdot 16^x - 17 \cdot 4^x + 8 = 0$

**Zad 267** **R** Wyznacz ekstrema funkcji: f(x) = $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$. Dla jakiego parametru m, funkcja f'(x) = (m + 2)x nie posiada miejsc zerowych ?

**Zad 268** Dane są wierzchołki trójkąta ABC: A(-4,2), B(5,-2) i C(-6,-2). Napisz równanie środkowej poprowadzonej z wierzchołka A.

**Zad 269** **R** Rozwiąż równanie: $2\cos x = \sqrt{3}$

**Zad 270** Cztery liczby tworzą ciąg geometryczny. Trzecia liczba jest o 9 większa od pierwszej, a druga mniejsza od czwartej o 18. Znajdź te liczby.

**Zad 271** **R** Wyznacz asymptoty funkcji: $f(x) = \frac{2x-3}{x^2-9}$. Co należałoby zmienić w powyższej funkcji aby miała jedną asymptotę pionową x = 3 i jedną asymptotę poziomą y = 0,5 . Uzasadnij.

**Zad 272** **R** Dla jakiego parametru m, funkcja f(x) = $x^2 + 2(m + 1)x + 9m - 5$ przyjmuje wyłącznie wartości dodatnie ? Dla jakiego parametru m, miejsca zerowe tej funkcji są liczbami przeciwnych znaków ?

**Zad 273** **R** Rozwiąż równanie: $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$.

**Zad 274** W I pudełku jest 30% żarówek spalonych, zaś w II pudełku jest 40% dobrych. Oblicz prawdopodobieństwo tego że losowo wybrana żarówka jest

- dobra
- wadliwa z II pudełka

**Zad 275** **R** Rozwiąż równanie: $\frac{\log 2x}{\log(4x-5)} = 2$. Przyjmując że a jest rozwiązaniem powyższego równania, rozwiąż równanie asinx = -4,5.

**Zad 276** Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prostego, w którym podstawa jest trójkątem równobocznym o boku a=8, zaś przekątna ściany bocznej ma długość b=10.

**Zad 277** **R** Zbadaj monotoniczność i ekstrema funkcji: $y = -x^4 + x^2 + 1$ .

**Zad 278** **R** Rozwiąż równanie: $2^{x+1} + 4^x = 80$. Przyjmując że k jest rozwiązaniem powyższego równania, rozwiąż równanie $k^x = 5$.

**Zad 279** Suma kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych wynosi 35. Znajdź te liczby.

**Zad 280** **R** Wyznacz pochodną funkcji: $y = (x^2 - 8)(x^4 + 5) + x^3 \sin x - \frac{\sqrt{\cos x}}{x}$.

**Zad 281** **R** Rozwiąż równanie: $4 - \log x = 3\sqrt{\log x}$ . Rozwiąż nierówność $k^x < \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 5}{10n^2 + 4n}$ , gdzie k jest rozwiązaniem powyższego równania.

**Zad 282** **R** Wyznacz monotoniczność i ekstrema funkcji: $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 4}$.

**Zad 283** **R** Dla jakiego parametru m, funkcja $f(x) = mx^2 - 2(m - 1)x + m - 3$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe ?

**Zad 284** **R** W urnie znajduje się 8 kul białych, 6 zielonych i 4 niebieskich. Losujemy 6 kul. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy 2 białe, 3 zieloną, 1 niebieska.

**Zad 285** **R** Zbadaj monotoniczność i ekstrema funkcji: $f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 2}$.

**Zad 286** **R** Rozwiąż równanie: $2\cos x = 1$.

**Zad 287** **R** Wyznacz zbiór rozwiązań nierówności $2\cos x < -1$.

**Zad 288** **R** Rozwiąż równanie: $2^{2x-4} \cdot 256 = (0{,}25)^{x+1} \cdot 32^{x-2}$

**Zad 289** R Określ ekstrema funkcji: $y = x + \frac{9}{x}$. Dla jakiego parametru m, równanie y' = m, nie posiada rozwiązań?

**Zad 290** Oblicz pole powierzchni bocznej stożka, którego średnica podstawy ma długość 12, a kąt rozwarcia stożka ma miarę $60^o$.

**Zad 291** R Zbadaj monotoniczność i ekstrema funkcji: $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+3}$.

**Zad 292** W sklepie znajduje się 25% wyrobów z zakładu I, reszta pochodzi z zakładu II. Wśród nich jest odpowiednio 5% i 8% wyrobów z usterkami. Oblicz prawdopodobieństwo tego że losowo wybrany wyrób jest dobry.

**Zad 293** Oblicz sumę liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 3.

**Zad 294** R Dla jakich wartości parametru k rozwiązania równania: $x^2 + 2(3k - 1)x + 3k + 11 = 0$ są liczbami rzeczywistymi różnych znaków. Dla jakiego parametru m, suma odwrotności kwadratów jest większa od 1?

**Zad 295** Wysokość stożka wynosi 12cm, a promień jego podstawy ma długość 6cm. W ten stożek wpisano walec o wysokości 8cm. Oblicz objętość walca.

**Zad 296** R Zbadaj monotoniczność i ekstrema funkcji: $f(x) = x^2(x - 3)$. Dla jakich parametrów m i n, funkcja $g(x) = \frac{f(x)}{mx^n + 3}$ posiada asymptotę poziomą o równaniu y = 0,25? Uzasadnij.

**Zad 297** Wyznacz dziedzinę funkcji: $f(x) = \frac{\sqrt{2x-8}}{x^2-4} + \log_x(x+2)$.

**Zad 298** Suma kwadratów trzech kolejnych liczb parzystych wynosi 56. Znajdź te liczby.

**Zad 299** Rozwiąż równanie: $\log_2\{\log_4[\log(2x-5)]\} = 0$.

**Zad 300** R Wyznacz pochodną funkcji: $f(x) = \frac{-x^3+2}{2x^2-5x+1}$

**Zad 301** **R** Dla jakiego parametru m zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 + (3m - 2)x + (m + 2) > 0$ jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych ? Dla jakiego parametru m suma rozwiązań jest 2 razy mniejsza od ich iloczynu ?

**Zad 302** **R** Rozwiąż równanie $1 + 3 + 5 + ... + x = 81$

**Zad 303** **R** Liczby 2 i 3 są pierwiastkami wielomianu $W(x) = 2x^3 + mx^2 - 13x + n$. Znajdź trzeci pierwiastek.

**Zad 304** **R** Rozwiąż równanie $\cos x - \cos 2x = 1$

**Zad 305** Rozwiąż równanie: $\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}^3x + \operatorname{tg}^5x + ... = \frac{\sqrt{3}}{2}$

# Przykłady zadań egzaminacyjnych (2)

**Zad 1** **R** Dane jest równanie $(m - 5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$. Dla jakich wartości parametru m równanie posiada dwa różne pierwiastki tego samego znaku ?

**Zad 2** **R** Dany jest okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 14x + 2y + 25 = 0$. Wyznaczyć równania prostych stycznych do tego okręgu i przechodzących przez początek układu współrzędnych oraz pole trójkąta utworzonego przez te styczne i prostą przechodzącą przez punkty styczności.

**Zad 3** Iloczyn trzeciego i szóstego wyrazu rosnącego ciągu arytmetycznego równa się 36. Dzieląc dziewiąty wyraz tego ciągu przez czwarty wyraz otrzymujemy 3 i resztę 3. Wyznaczyć ten ciąg i obliczyć sumę 10 początkowych wyrazów tego ciągu.

**Zad 4** W sześcianie o krawędzi a połączono wszystkie wierzchołki dolnej podstawy z jednym z wierzchołków podstawy górnej. Obliczyć pole powierzchni całkowitej i objętość otrzymanego w ten sposób ostrosłupa. **R** obliczyć miarę kąta dwuściennego zawartego między tymi ścianami bocznymi ostrosłupa, które nie są prostopadłe do płaszczyzny podstawy.

**Zad 5** Gra polega na jednoczesnym rzucie kostką do gry i monetą. Wygrana następuje przy jednoczesnym wyrzuceniu orła i szóstki. Obliczyć prawdopodobieństwo tego że na cztery gry wygrana nastąpi:

a) dokładnie jeden raz
b) co najwyżej jeden raz.

**Zad 6** **R** Dane są zbiory: $A = \{(x,y): x,y \in R \wedge y \leq -x^2 + mx - m^2\}$, $B = \{(x,y): x,y \in R \wedge x + y \geq 1\}$ gdzie $m \in R$.

a) Dla m = 1 zaznacz w prostokątnym układzie współrzędnych XOY na płaszczyźnie zbiór $A \cap B$.
b) Dla jakiej wartości parametru m zbiory A i B są rozłączne ?

**Zad 7** Dane są dwa wierzchołki trójkąta ABC: A=(-1,1), B=(5,7). Wysokości trójkąta przecinają się w punkcie P=(3,3).

a) Oblicz współrzędne wierzchołka C tego trójkąta.
b) Napisz równanie okręgu opisanego na tym trójkącie.
c) **R** Wyznacz zbiór środków wszystkich cięciw okręgu opisanego na trójkącie ABC i przechodzącego przez punkt P.

**Zad 8** **R** Dane są punkty A=(-1,0), C=(0,1), D=(-1,1) oraz krzywa $y = \sqrt{x}$.

a) Wyznacz współrzędne takiego punktu B należącego do krzywej, by pole czworokąta ABCD było najmniejsze oraz oblicz to pole.
b) Znajdź równanie tej stycznej do krzywej, która jest równoległa do prostej przechodzącej przez punkty A i B.

**Zad 9** **R** Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny o boku a. Jedna z krawędzi bocznych jest prostopadła do podstawy, zaś pozostałe krawędzie boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod równymi kątami $\alpha$.Wyznacz pole największej ściany bocznej tego ostrosłupa. Oblicz taki kąt nachylenia największej ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa, by pole tej ściany było równe sumie pól pozostałych ścian bocznych.

**Zad 10** **R** Ze zbioru wszystkich liczb całkowitych spełniających układ nierówności :

$$\begin{cases} 4^{\log_2(x+3)} > 1 \\ \sqrt{x^2+4x+4} < 5 \end{cases}$$

losujemy kolejno bez zwracania dwie liczby a, b i tworzymy funkcję f(x) = ax + b, $x \in R$.

Niech A oznacza zdarzenie: utworzona funkcja jest nierosnąca, zaś B - utworzona funkcja jest parzysta lub nieparzysta.

a) które ze zdarzeń A, B jest bardziej prawdopodobne ?
b) sprawdź niezależność zdarzeń A i B.

**Zad 11** **R** Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 + (m - 3)x + m(2 - m) = 0$ ma dwa różne rozwiązania dodatnie.

**Zad 12** **R** Dana jest funkcja $f(x) = a^{2x-5} \cdot b^{-x+4} + c$, gdzie

$$a = 2^{2k+3} \cdot 4^{-k} \cdot \frac{1}{4},\ k \in R,\ b = \log_{\frac{1}{2}} 0{,}125 - \log_{\frac{1}{2}} 0{,}5,\ c = -\frac{2}{5}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Naszkicuj wykresy funkcji f(x) i $|f(x)|$. Na podstawie wykresu funkcji y = $|f(x)|$ ustal, dla jakich wartości parametru m równanie $|f(x)| = m$ ma dokładnie dwa rozwiązania.

**Zad 13** Punkty A = (0,6) i C = (8,2) są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu ABCD.

a) Porównaj stosunek pola koła opisanego na kwadracie ABCD do pola tego kwadratu ze stosunkiem pola kwadratu ABCD do pola koła wpisanego w ten kwadrat.
b) Wyznacz równanie okręgu wpisanego w kwadrat ABCD i równanie okręgu opisanego na tym kwadracie.

**Zad 14** **R** W pudełku są kule ponumerowane liczbami 1, 2, 3, 4, 5, 6. Losujemy kolejno bez zwracania dwie kule. Niech zdarzenie A oznacza, że iloczyn numerów wylosowanych kul jest większy od 20, zdarzenie B oznacza, że za pierwszym razem wylosowano kulę o numerze parzystym.

a) Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń A i B.
b) Sprawdź, czy zdarzenia A i B są niezależne.

**Zad 15** **R** W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym dane są: krawędź podstawy a o długości równej 2 i krawędź boczna b o długości 3. Oblicz:

a) długość dłuższej i krótszej przekątnej graniastosłupa,
b) cosinus kąta między przekątnymi wychodzącymi z jednego wierzchołka, których długości obliczono w punkcie a) oraz pole trójkąta wyznaczonego przez te przekątne,
c) pole powierzchni i objętość tego graniastosłupa.

**Zad 16** **R** Narysuj wykres funkcji $f(x) = x^2 - |4x - 4|$. Posługując się wykresem funkcji f(x), odczytaj liczbę rozwiązań równania $x^2 - |4x - 4| = m$ w zależności od parametru m.

**Zad 17** **R** Rozwiąż nierówność: $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(x+1)^n}<3x-2$.

**Zad 18** W urnie jest n kul białych i 2n kul czarnych. Losujemy dwie kule. Jakie musi być n, aby prawdopodobieństwo wylosowania kul różnych kolorów było równe prawdopodobieństwu wylosowania kul tego samego koloru.

**Zad 19** **R** Jakie wymiary należy nadać puszcze do konserw w kształcie walca o objętości V (grubość blachy pomijamy), aby zużyć jak najmniej materiału?

**Zad 20** **R** Środek okręgu przechodzącego przez punkty A = (3,0), B = (-1,2) należy do prostej x - y + 2 = 0.

a) Znajdź równanie okręgu.
b) Wyznacz na okręgu teki punkt C ≠ A, aby $\vec{AC} \perp \vec{AB}$.
c) Znajdź równanie stycznej do okręgu w punkcie C.
d) Znajdź zbiór środków okręgów stycznych zewnętrznie do okręgu wyznaczonego w podpunkcie a) i równocześnie stycznych do prostej y = 0.

**Zad 21** **R** Dla jakich wartości parametru m równanie $(2m^2 + m - 1)x^2 + (5 - m) - 6$ ma dwa różne pierwiastki jednakowych znaków?

**Zad 22** Punkty A = (0,4), D = (3,5) są wierzchołkami trapezu równoramiennego ABCD. Podstawy trapezu są prostopadłe do prostej x - y - 6 = 0 przechodzącej przez punkt C. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków i pole trapezu.

**Zad 23** Trzy liczby, których suma wynosi 93 tworzą ciąg geometryczny. Te same liczby stanowią pierwszy, drugi i siódmy wyraz ciągu arytmetycznego. Wyznacz te liczby.

**Zad 24** W prawidłowym ostrosłupie czworokątnym dane są a = 20, tg$\alpha$ = $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, gdzie a jest długością krawędzi podstawy, $\alpha$ - kątem nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość ostrosłupa. **R** Przez krawędź podstawy ostrosłupa poprowadzono płaszczyznę prostopadłą do przeciwległej ściany bocznej. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

**Zad 25** W pierwszej urnie są 2 kule białe i 6 czarnych, w drugiej jest 5 kul białych i 2 czarne. Losujemy z pierwszej urny jedną kulę i nie oglądając jej wkładamy do urny drugiej. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to kula biała?

**Zad 26** **R** Dla jakich wartości parametru $\alpha$ pierwiastki równania $x^2 - 2x\cos\alpha - \sin^2\alpha = 0$ spełniają równość $x_1^2 + x_2^2 = 3$.

**Zad 27** Dane są trzy kule: opisana na sześcianie, styczna do wszystkich jego krawędzi oraz wpisana w ten sześcian.

a) Wyznacz pola powierzchni i objętości wszystkich trzech kul, jeżeli wiadomo, że krawędź sześcianu wynosi a.
b) Zbadaj, czy pola kul lub ich objętości tworzą ciąg arytmetyczny.

**Zad 28** **R** Zbadaj przebieg zmienności funkcji: $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x}$.

**Zad 29** W trapezie równoramiennym ramię l = 6cm jest nachylone do podstawy pod kątem $\alpha = 60^o$. Przekątna tego trapezu jest prostopadła do ramienia. Oblicz pole tego trapezu.

**Zad 30** W hurtowni znajdują się detale pochodzące z trzech zakładów: $Z_1$, $Z_2$, $Z_3$. Zapotrzebowanie pokrywane jest przez zakłady odpowiednio w 25%, 35% i 40%. Produkcja zawiera odpowiednio 2%, 4% i 5% braków. Oblicz prawdopodobieństwo wybrania jednego detalu dobrego.

**Zad 31** **R** Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $mx^2 + (m - 3)x + 2 - m = 0$ ma dwa różne rozwiązania dodatnie.

**Zad 32** **R** Dana jest funkcja f(x) = $a^{2x-5} \cdot b^{-x+4} + c$,

gdzie $a = \sqrt{5}^{\log_{\sqrt{2}} 2}$, $b = \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{2}$, $c = -\frac{2}{5}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]^{\frac{1}{2}}$.

Narysuj wykresy funkcji y = f(x) i y = $|f(x)|$. Na podstawie wykresu funkcji y = $|f(x)|$ podaj liczbę rozwiązań równania $|f(x)|$ = m w zależności od wartości parametru m.

**Zad 33** **R** Z wycinka koła o promieniu R wykonano pobocznicę stożka. Jaka powinna być wysokość stożka, aby jego objętość była największa? Dla obliczonej wysokości ustal miarę kąta środkowego tego wycinka.

**Zad 34** **R** W pudełku $P_1$ są kule ponumerowane liczbami 1, 2, 3, 4, 5, 6, zaś w pudełku $P_2$ są kule ponumerowane liczbami 8, 9, 10, 11, 12. Losujemy dwie kule na trzy sposoby:

a) I - obie kule losujemy bez zwracania z pudełka $P_1$,
b) II - obie kule losujemy ze zwracaniem z pudełka $P_2$,
c) III - losujemy po jednej kuli z każdego pudełka.
d) Opisz zbiór zdarzeń elementarnych każdego sposobu losowania. Który ze sposobów daje najmniejsze prawdopodobieństwo wylosowania takich kul, że iloczyn ich numerów jest liczba nieparzystą?

**Zad 35** **R** Okrąg o promieniu R = 5 przecina się z okręgiem o równaniu $x^2 + y^2 - 6x = 0$ pod kątem $\alpha = 60^o$ (oznacza to że jeden z kątów między stycznymi, poprowadzonymi do tych okręgów w punkcie ich przecięcia ma miarę $60^o$). Oblicz odległość środków tych okręgów i długość ich wspólnej cięciwy. Napisz równanie drugiego okręgu, wiedząc, że wspólna cięciwa jest prostopadła do osi OX. Rozpatrz wszystkie przypadki.

**Zad 36** **R** Dane są wielomiany $W(x) = x^3-(m-n)x^2+(m+n)x-8$, $P(x) = (x-1)(x^2+6x+8)$, $Q(x) = x^3+3x^2-7x-12$

a) Wyznacz m i n tak, aby wielomiany W(x) i P9x) były równe.
b) Dla wyznaczonych m i n rozwiąż nierówność $W(x) \geq Q(x)$.

**Zad 37** **R** Liczby $\log_{\sqrt{3}} 9, \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + 2\left(\sqrt{3}\right)^0, \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{16}\right)^2$ są (w podanej kolejności) trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego $(a_n)$. Suma 2n początkowych wyrazów tego ciągu jest o 60 większa od sumy n początkowych wyrazów tego ciągu. Wyznacz n.

**Zad 38** **R** W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna podstawy ma długość d, zaś pole powierzchni bocznej jest 8 razy większe od pola podstawy.

a) Oblicz objętość V i pole powierzchni całkowitej P tego ostrosłupa.

b) Oblicz cosinus kąta $\alpha$ nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy oraz $\cos\beta$ nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy. Porównaj miary tych kątów bez korzystania z tablic matematycznych.

**Zad 39** Rzucamy dwukrotnie kostką do gry. Określ zbiór zdarzeń elementarnych tego doświadczenia.

a) Które ze zdarzeń jest bardziej prawdopodobne:
b) A - w pierwszym rzucie wypadnie suma oczek mniejsza niż w drugim;
c) B - suma oczek na obu kostkach jest niemniejsza od 8

c) Sprawdź niezależność zdarzeń A i B.
d) Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń $A \cup B$ oraz $A|B$.

**Zad 40** W czworokącie ABCD dane są długości boków $|AB| = 13$, $|BC| = 11$, $|CD| = 7$, $|AD| = 1$. Kąt przy wierzchołku A tego jest prosty. Oblicz pole P tego czworokąta oraz długości $d_1$ i $d_2$ jego przekątnych.

## Próbna matura testowa

**Zad 1** Wyznacz A$\cap$B, gdzie $A=\left\{x\in R\colon x=\frac{12}{n+1}, n\in N\right\}$, B = <1,5;4)

**Zad 2** Wykres funkcji liniowej przechodzi przez punkty A = (3,-4) i B = (6,-2). Wyznacz punkty wspólne wykresu tej funkcji z osiami układu współrzędnych.

**Zad 3** Ile rozwiązań ma układ równań: $\begin{cases} x^2+y^2=4y-3 \\ y=-3x^2+1 \end{cases}$? Odpowiedź uzasadnij.

**Zad 4** Dana jest prosta *l* o równaniu 2x - y + 1 = 0. Napisz równanie prostej *k* prostopadłej do *l* i przechodzącej przez punkt P = (1,-2).

**Zad 5** Dla jakich wartości parametrów a i b funkcje $f(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}$ oraz $g(x)=\frac{3x}{x^2+x-2}$ są równe?

**Zad 6** Dla jakiej wartości parametru a dwumian x + 1 dzieli wielomian $W(x) = x^3 + (a^3 - 1)x^2 + (2a - 3)x - 1$?

**Zad 7** Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \log_x(3 - x)$.

**Zad 8** Boki równoległoboku mają długości 5cm i 6cm, zaś jego kąt ostry ma miarę $60^0$. Oblicz długość dłuższej przekątnej.

**Zad 9** **R** Koszykarz trafia do kosza z prawdopodobieństwem równym 0,9. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wykonując trzy rzuty koszykarz ten trafi dokładnie 1 raz?

**Zad 10** W pudełku $P_1$ są dwie kule czarne i trzy kule białe, w pudełku $P_2$ są cztery kule czarne i jedna biała. Losujemy kolejno z pudełka $P_1$ i $P_2$ po jednej kuli. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowano dokładnie jedną kulę czarną?

**Zad 11** **R** Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których funkcja $f(x) = (m-4)x^2 - (2-m)x + 1 + 0,5m$ przyjmuje tylko wartości dodatnie?

**Zad 12** Namiot w kształcie stożka ma wysokość 2m i kąt rozwarcia przy wierzchołku o mierze $60^0$. Ile metrów bieżących wykładziny o szerokości 2,5m potrzeba by przykryć w całości podłogę namiotu (bez sztukowania)?

**Zad 13** **R** Rozwiąż nierówność $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{|x|}} < \frac{1}{4}$.

**Zad 14** Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych podzielnych przez 5.

**Zad 15** **R** Rozwiąż równanie $\cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \ldots = 1$ dla $x \in (-\pi, \pi)$, którego lewa strona jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego.

**Zad 16** **R** Dla jakich wartości parametru b funkcja $g(x) = 0,[3]x^3 + bx^2 + 3x$ osiąga ekstremum w punkcie o odciętej $x_0 = -1$? Określ rodzaj ekstremum.

**Zad 17** **R** Dla jakich argumentów x funkcja $h(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$ jest rosnąca?

**Zad 18** **R** Oblicz $\sin^4 x + \cos^4 x$ wiedząc że $\sin x \cos x = 0,2$.

**Zad 19** Cztery wierzchołki sześcianu o krawędzi długości l są równocześnie wierzchołkami czworościanu foremnego. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego czworościanu.

**Zad 20** **R** Dana jest funkcja $f(x) = \frac{1}{x} + 1$. Rozwiąż nierówność $f(x) > f(x-2)$.