KOMBINATORYKA I RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Andrzej Rowiński

Opracowanie zawiera wyjaśnienia poświęcone typowym zadaniom z kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa.

Spis treści

Kombinatoryka

Silnia

Wzór:

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ ... \cdot (n-1) \cdot n$

$1! = 1$

$0! = 1$

Przykład 1:

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

Przykład 2:

$$\frac{20!}{18!} = \frac{\cancel{18!} \cdot 19 \cdot 20}{\cancel{18!}} = 19 \cdot 20 = 380$$

Permutacje

Opis:

Określają ilość sposobów uporządkowania elementów danego zbioru. Rozpoznajemy je po sformułowaniach: „na ile sposobów można uporządkować ...", „na ile sposobów można poustawiać ..." itp.

Wzór:

$$P_n = n!$$

Przykład:

Na ile sposobów można poustawiać 5 żołnierzy w szeregu?

$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

Odp: Żołnierzy można poustawiać na 120 sposobów.

Kombinacje

Opis:

Określają na ile sposobów można wybrać *k* elementów z *n* elementów. Stosowane są w przypadku gdy kolejność wyboru (losowania) nie ma znaczenia tzn. gdy elementy są nierozróżnialne. Rozpoznajemy je po sformułowaniach: „na ile sposobów można wybrać ... spośród ...", „Wylosowano ... spośród ..." itp.

Wzór:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Przykład:

Na ile sposobów można wybrać 5 - osobową delegację spośród 8 osób?

$$C_8^5 = \binom{8}{5} = \frac{8!}{5! \cdot (8-5)!} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{\cancel{5!} \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{\cancel{5!} \cdot 3!} = \frac{\cancel{6} \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot \cancel{2 \cdot 3}} = 56$$

Odp: 5 - osobową delegację spośród 8 osób można wybrać na 56 sposobów.

Wariacje z powtórzeniami

Opis:

Określają na ile sposobów można wybrać *k* elementów z *n* elementów. Stosowane są w przypadku gdy kolejność wyboru (losowania) ma znaczenie i element może zostać powtórnie wylosowany. Rozpoznajemy je po sformułowaniach: „na ile sposobów można wybrać ... spośród ...", „wylosowano ze zwracaniem ... spośród ..." itp. czyli podobnie jak kombinacje z tym że kolejność losowań jest istotna i dotyczy np. losowania cyfr tworzących liczby, ponieważ np. 1355 ≠3515.

Wzór:

$$\overline{V}_n^k = n^k$$

Przykład:

Ile różnych liczb 3 - cyfrowych można utworzyć z cyfr 1,2,3,4,5?

$\overline{V}_5^3 = 5^3 = 125$

Odp: Można utworzyć 125 różnych liczb.

Wariacje bez powtórzeń

Opis:

Określają na ile sposobów można wybrać *k* elementów z *n* elementów. Stosowane są w przypadku gdy kolejność wyboru (losowania) ma znaczenie i element nie może zostać powtórnie wylosowany. Rozpoznajemy je po sformułowaniach: „na ile sposobów można wybrać ... spośród ...”, „wylosowano bez zwracania ... spośród ...” itp. czyli podobnie jak kombinacje z tym że kolejność losowań jest istotna i dotyczy np. losowania cyfr tworzących liczby o różnych cyfrach.

Wzór:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Przykład:

Ile różnych liczb 3 - cyfrowych o niepowtarzających się cyfrach można utworzyć z cyfr 1,2,3,4,5?

$$V_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{\cancel{2!} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{\cancel{2!}} = 60$$

Odp: Można utworzyć 60 różnych liczb.

Rachunek prawdopodobieństwa

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Wzór:

A - zbiór zdarzeń sprzyjających $\overline{\overline{A}}$ - ilość zdarzeń sprzyjających

□ - zbiór wszystkich zdarzeń $\overline{\overline{\Omega}}$ - ilość wszystkich zdarzeń

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$$

Przykład:

Rzucamy monetą i kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego że uzyskamy orła i co najmniej piątkę.

Ω = {(O,1),(O,2),...,(O,6),(R,1),(R,2),...,(R,6)}

$\overline{\overline{\Omega}}$ = 12

A = {(O,5),(O,6),(R,5),(R,6)}

$\overline{\overline{A}}$ = 4

$P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Odp: Prawdopodobieństwo tego że uzyskamy orła i co najmniej piątkę wynosi $\frac{1}{3}$.

Zdarzenia przeciwne

Wzór:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Przykład:

Prawdopodobieństwo wygrania w pewnej grze wynosi 0,12. Oblicz prawdopodobieństwo tego że przegramy.

A - wygrana

A' - przegrana

P(A') = 1 - 0,12 = 0,88

Odp: Prawdopodobieństwo tego że przegramy wynosi 0,88.

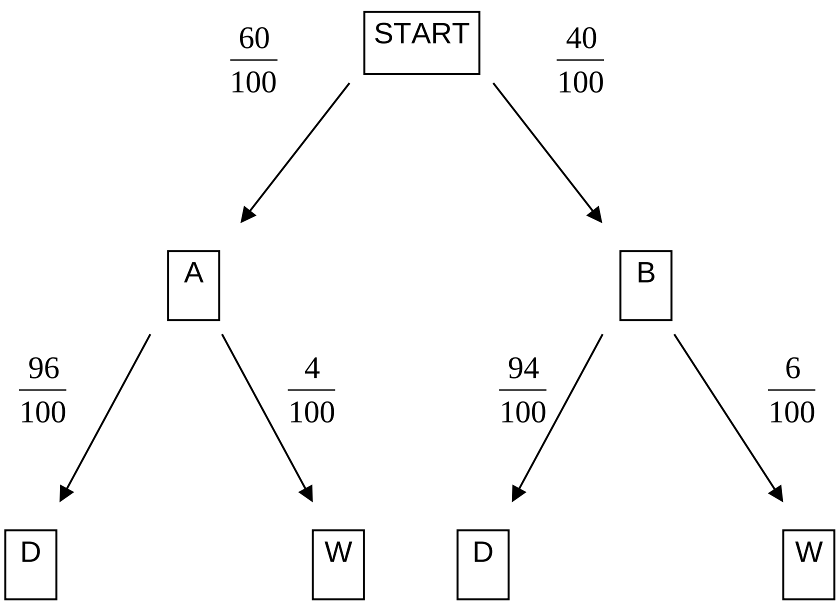
Prawdopodobieństwo całkowite

Przykład:

60% wyrobów pochodzi z zakładu A i wśród nich jest 4% wadliwych, zaś reszta z zakładu B i wśród nich jest 6% wadliwych. Oblicz prawdopodobieństwo tego że zakupiony wyrób jest:

a} dobry

b) wadliwy z zakładu B.



Opis:

„Drzewo” pokazuje drogę do danego zdarzenia. Poruszając się wzdłuż gałęzi mnożymy prawdopodobieństwa (<u>mnożenie związane jest ze spójnikiem *i*</u>), zaś pomiędzy gałęziami prawdopodobieństwa dodajemy (<u>dodawanie związane jest ze spójnikiem *lub*</u>).

A - zakupiono wyrób dobry

B - zakupiono wyrób wadliwy z zakładu B

$$P(A)=\frac{60}{100}\cdot\frac{96}{100}+\frac{40}{100}\cdot\frac{94}{100}=\frac{119}{125}$$

$$P(B)=\frac{40}{100}\cdot\frac{6}{100}=\frac{3}{125}$$

Odp: Prawdopodobieństwo tego że zakupiony wyrób jest dobry wynosi $\frac{119}{125}$, zaś że wadliwy z zakładu B wynosi $\frac{3}{125}$.

Schemat Bernoulli’ego

Wzór:

A - niezależne zdarzenie losowe

$$P_n^k(A)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$

gdzie:

n - ilość prób

k - ilość sukcesów

p - prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczej próbie

q - prawdopodobieństwo porażki w pojedynczej próbie (q = 1 - p)

Opis:

Zdarzenia losowe powtarzają się wielokrotnie. <u>Wzór może być stosowany gdy zdarzenia losowe są niezależne</u>, tzn. wynik zajścia jednego zdarzenia nie zależy od wyniku innego zdarzenia <u>i wszystkie zachodzą z tym samym prawdopodobieństwem</u> czyli są jednakowo prawdopodobne.

Przykład:

Strzelec trafia do tarczy z prawdopodobieństwem 0,8. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że na 5 strzałów trafi dokładnie 3 razy.

n = 5

k = 3

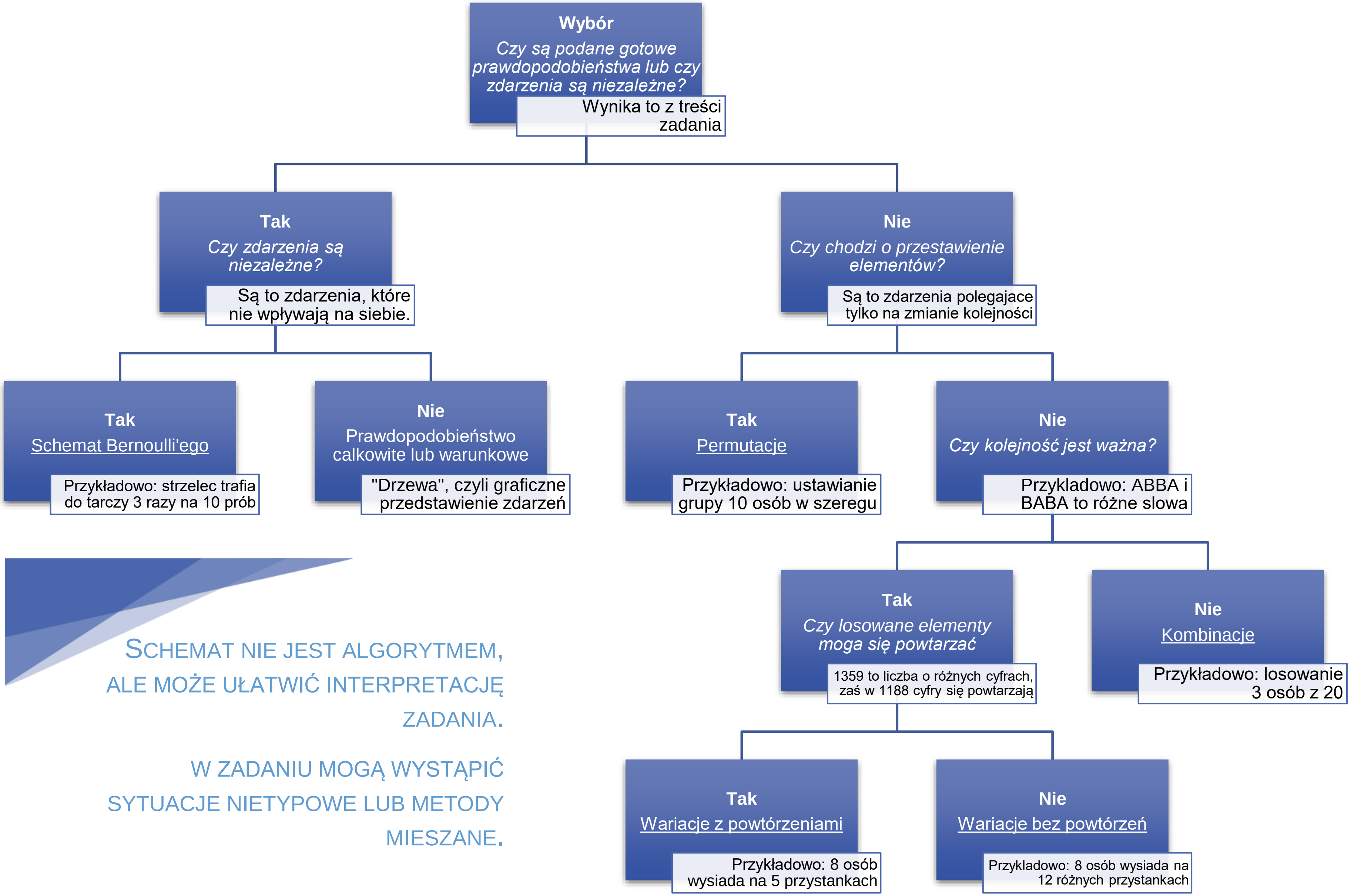
p = 0,8

q = 1 - 0,8 = 0,2

$$P_5^3(A) = \binom{5}{3}(0{,}8)^3(0{,}2)^{5-3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} \cdot 0{,}512 \cdot 0{,}04 = 0{,}2048$$

Odp: Prawdopodobieństwo tego, że na 5 strzałów trafi dokładnie 3 razy wynosi 0,2048.

Identyfikacja zadania



SCHEMAT NIE JEST ALGORYTMEM, ALE MOŻE UŁATWIĆ INTERPRETACJĘ ZADANIA.

W ZADANIU MOGĄ WYSTĄPIĆ SYTUACJE NIETYPOWE LUB METODY MIESZANE.